Corrigé

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\,;\,0\,;\,3),\ B(0\,;\,2\,;\,1), C(-1\,;\,-1\,;\,2)\ \text{et}\ D(3\,;\,-3\,;\,-1).$$

1. **Calcul d'un angle**

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; or ces coordonnées ne sont pas proportionnelles $\dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-2}{-1}$,

donc il n'existe pas de réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b.
- $AB^2 = 4+4+4 = 3\times 4$, donc $AB = 2\sqrt{3}$:
- $AC^2 = 9+1+1 = 11$, donc $AC = \sqrt{11}$.

c.
- D'une part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6-2+2 = 6$;
- D'autre part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

On a donc $6 = 2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\widehat{BAC} \iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 58{,}51$, soit $58{,}5°$ au dixième près.

2. **Calcul d'une aire**

a. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de $\mathscr{P}$. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

Avec $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$, on obtient :

$-2(x+1)+2(y+1)-2(z-2) = 0 \iff -(x+1)+(y+1)-(z-2) = 0 \iff -x+y-z+2 = 0.$

b. En prenant le vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur de la droite (AB), soit $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ on a :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-2 &=& t\times(-1)\\ y-0 &=& t\times 1\\ z-3 &=& t\times(-1)\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff$

$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& 3-t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$

c. E projeté orthogonal de C sur (AB) appartient au plan $\mathscr{P}$ et à la droite (AB) ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de $\mathscr{P}$ et les équations paramétriques de (AB), donc le système :

$\begin{cases} -x+y-z+2 & = & 0 \\ x & = & 2-t \\ y & = & t \\ z & = & 3-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; en remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathscr{P}$ on obtient :

$-2+t+t-3+t+2=0 \iff 3t-3=0 \iff t=1$.

On a donc E(1 ; 1 ; 2).

d. On a $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$, d'où $\text{BC}^2=1+9+1=11$ et $\text{BC}=\sqrt{11}$.

Comme $\text{AC}=\text{BC}=\sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C ; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

On a $\overrightarrow{\text{CE}}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $\text{CE}^2=1+4=8$ et $\text{CE}=2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

$\mathscr{A}(\text{ABC})=\dfrac{\text{AB}\times\text{CE}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$.

3. Calcul d'un volume

a. $\text{F}\in(\text{ABC}) \iff$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, tels que : $\overrightarrow{\text{AF}}=\alpha\overrightarrow{\text{AB}}+\beta\overrightarrow{\text{AC}} \iff$

$\begin{cases} -1 & = & -2\alpha-3\beta \\ -1 & = & 2\alpha-\beta \\ 0 & = & -2\alpha-\beta \end{cases}$. En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on obtient $-1=-2\beta \iff \beta=\dfrac{1}{2}$ et en remplaçant β par $\dfrac{1}{2}$ dans la première équation $-1=-2\alpha+\dfrac{3}{2} \iff 2\alpha=1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2} \iff \alpha=-\dfrac{1}{4}$.

Donc $\overrightarrow{\text{AF}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}}$: les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Avec $\overrightarrow{\text{FD}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$, on peut calculer :

$\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=-2-2+4=0$ et
$\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=-6+2+4=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{FD}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :
$\mathcal{V}(\text{ABCD}) = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABC}) \times \text{FD}$

Avec $\text{FD}^2 = 4+4+16 = 24$, on trouve $\text{FD} = \sqrt{24} = \sqrt{4\times 6} = 2\sqrt{6}$, d'où :
$\mathcal{V}(\text{ABCD}) = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = \dfrac{4\times 6}{3} = 8.$